SERIE C

SUJET DU BAC 2017, SERIE C (B 832)

Durée : 04 heures

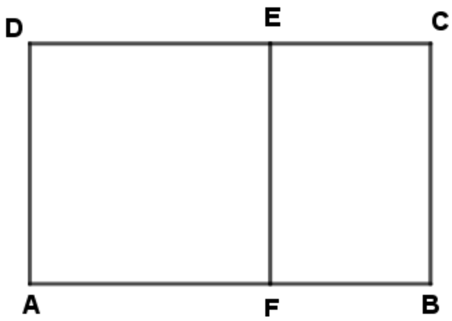
Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.

Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.

Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements

Contexte : Etude du projet de construction d'une maison.

Sur un domaine $ABCD$ de forme rectangulaire, Arouna, le propriétaire, décide d'ériger une maison. Dans le dossier technique, l'architecte en charge du projet propose un aménagement comme l'indique la figure ci-après.



La partie représentée par le carré $AFED$ est destinée au bâtiment et l'autre partie au jardin et autres ouvrages. L'architecte affirme que pour réaliser le découpage du domaine, il a utilisé une similitude directe s qui transforme les points A, B, C et D respectivement en B, C, E et F.

N'étant pas outillé pour comprendre tout le dossier, Arouna sollicite son fils Ousmane, élève en classe de terminale C, pour mieux apprécier certaines informations qui y sont contenues.

Afin de vérifier l'existence de la similitude s, Ousmane suppose que $AD = 1$ et $AB = \ell\,(\ell > 1)$, puis il munit le plan du repère orthonormé direct $\left(A; \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}\right)$. Il s'intéresse par ailleurs à la quantité de carreaux à utiliser pour le revêtement du plancher dans les pièces du bâtiment et aussi à la configuration du jardin.

Tâche

Tu es invité(e) à aider Ousmane à répondre à ses différentes préoccupations en résolvant les problèmes ci-après.

Problème 1

1- Ousmane suppose que la similitude s existe.

a) Démontre que l'on a : $\frac{1}{\ell} = \ell - 1$.

b) Déduis-en que $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

c) Détermine le rapport et l'angle de la similitude S.

2-

a) Justifie l'existence d'une similitude directe S' qui transforme A en B et B en C.

b) Démontre que dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}\right)$, la similitude S' a pour écriture complexe :

$$z' = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) iz + \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

c) Détermine les images des points C et D par S'.

d) Justifie que l'architecte a raison au sujet du procédé de découpage du domaine.

Problème 2

Il est prévu que les planchers des pièces du bâtiment seront carrelés.

3- Le plancher de la salle à manger a la forme d'un rectangle dont les dimensions sont 4,54 m et 3,75 m. On veut carreler cette pièce avec des carreaux carrés de 33 cm de côté. On commence la pose à partir d'un coin de la pièce.

a) Justifie qu'il n'est pas possible de couvrir le plancher de cette pièce avec uniquement des carreaux entiers (sans découpage).

b) Effectue la division euclidienne de 454 par 33. Déduis-en le nombre de carreaux non découpés qui sont posés dans le sens de la longueur.

c) Détermine le nombre de carreaux non découpés qui seront posés dans cette pièce.

4- Le plancher de la cuisine a la forme d'un rectangle de dimensions 4,55 m et 3,85 m. On veut utiliser deux types de carreaux pour son revêtement : des pièces carrées de type T_1 de 15cm de côté et des pièces carrées de type T_2 de 35cm de côté ; et on doit utiliser plus de pièces du type T_2 que de pièces du type T_1.

a) Justifie que le nombre a de carreaux du type T_1 et le nombre b de carreaux du type T_2 sont tels que $9a + 49b = 7007$.

b) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $9x + 49y = 7007$.

c) Détermine le nombre de pièces de chaque type que l'on peut poser dans la cuisine.

Problème 3

Pour rendre attrayante la cour de la maison, l'architecte a prévu un parterre de fleurs suivant des configurations bien précises. L'une des configurations est modélisée par une portion de l'ensemble (Γ) des points M du plan dont les cordonnées (x, y), dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, vérifient :

$$\frac{3\ln y}{\sqrt{y}} + y - 1 - |x| = 0.$$

5- On considère la fonction g définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $g(x) = 2x\sqrt{x} - 3lnx + 6$.

a) Etudie le sens de variation de g.

b) Justifie que g admet un minimum que tu préciseras.

c) Détermine le signe de $g(x)$ pour tout élément de l'intervalle $]0;\ +\infty[$.

6- On considère la fonction f de $]0;\ +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1$.

a) Démontre que f est une application.

b) Etudie les limites de f à droite en 0 et en $+\infty$.

c) Etudie le sens de variation de f.

d) Dresse le tableau de variations de f.

e) Déduis-en le signe de $f(x)$ pour tout x élément de $]0;\ +\infty[$.

7- On note (C) la courbe représentative de dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C).

b) Etudie la position relative de (C) et de (D).

c) Trace la courbe (C).

8-

a) Démontre que f est une bijection. On note (C') la courbe de sa bijection réciproque.

b) Soit $M(x, y)$ un point de (Γ). En remarquant que l'on a $f(x) = |x|$, démontre que $y \geq 1$.

c) Démontre que (Γ) est la réunion d'une portion de $((\Gamma_1)$ de (C') et de son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

d) Trace (Γ) dans le même repère que (C).

SUJET DU BAC 2018, SERIE C (E 732)

Durée : 04 heures

Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.

Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.

Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements

Contexte : Premiers pas d'un jeune diplômé sur le marché du travail.

A peine sorti de l'école nationale de génie civil, Codjo vient de décrocher un premier contrat de prestation de service : réfectionner la salle de spectacles de l'arrondissement de Valo. Le dossier technique mentionne, entre autres, la décoration de la salle et le renouvellement des sièges. Il y a été utilisé par endroits un langage mathématique auquel Codjo est habitué depuis sa formation : « Chaque siège aura la forme d'un tronc de pyramide. Les sommets de la base de cette pyramide, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, sont les points images des solutions non imaginaires de l'équation $(E): (z-3i)^5 - \overline{z} - 3i = 0$, d'inconnue z, nombre complexe dont le conjugué est noté $\overline{z}$.»

Cossi, un jeune frère de Codjo et élève en classe terminale scientifique, est intéressé par l'étude des diverses configurations que présente le projet ainsi que les calculs y afférents.

Tâche :

Tu es invité(e) à trouver des réponses aux préoccupations de Cossi en résolvant les trois problèmes ci-après :

Problème 1

1-

a) Vérifie que $3i$ est une solution de l'équation (E).

b) Démontre que si z est une solution de (E), distincte de $3i$, alors $|z-3i| = 1$.

c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2-

a) Justifie que les points images des solutions de (E), distincts du point A d'affixe $3i$, sont les sommets d'un polygone régulier.

b) Déduis-en la nature d'une base du tronc de la pyramide représentant un siège.

Problème 2

En vue de la décoration de la salle de spectacles, il doit être matérialisé, sur l'un des murs, un domaine (D) déterminé par la courbe (Γ_1), représentative de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)$ et par le symétrique (Γ_2) de (Γ_1) par rapport à la droite d'équation $y = x$,

3-

a) Justifie que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

b) Démontre que l'origine du repère est un centre de symétrie de (Γ_1).

c) Calcule la limite de f en $+\infty$. Déduis-en la limite de f en $-\infty$.

d) Justifie que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4-

a) Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.Déduis-en $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Etudie les branches infinies de la courbe (Γ_1).

5-

a) Etudie les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = x - \ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)$$

b) Justifie que l'équation $u(x) = 0$ admet trois solutions dont l'une est 0 et les deux autres sont opposés. On note α la solution strictement positive de l'équation $u(x) = 0$.

c) Vérifie que $2{,}1 < \alpha < 2{,}2$.

d) Etudie la position relative de (Γ_1) par rapport à la droite d'équation $y = x$.

6- Trace les courbes $(\Gamma_1), (\Gamma_2)$ et la droite d'équation $y = x$ dans le même repère.

7-

a) Justifie que f est bijective.

b) Démontre que (Γ_2) est la courbe de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x}).$$

8- Le domaine (D) est délimité par les courbes (Γ_1) et (Γ_2), et les droites d'équations $x = -\alpha$ et $x = \alpha$.

a) Justifie que l'aire de (D)vaut 4 fois celle du domaine (D_1) délimité par (Γ_2) et les droites d'équations $y = x, x = 0$ et $x = \alpha$.

b) Calcule l'aire de (D_1)en fonction de α.

c) Déduis-en une valeur approchée de l'aire du domaine (D).

<u>Problème 3</u>

La décoration de la salle sera réalisée avec des matériaux locaux de deux types m_1 et m_2. Un matériau de type m_1 coûte 100 francs, un matériau de type m_2 coûte 120 francs, et le prix d'achat de ces matériaux s'élève à 11040 francs. Par ailleurs, le nombre de matériaux de type m_1 divise celui du type m_2. Trois barres lumineuses forment un triangle équilatéral BCD de côté 1. Les matériaux serviront à concrétiser deux ensembles (Γ_3) et (Γ_4) des points de l'espace orienté $(\mathcal{E})$.

(Γ_3) est l'ensemble des points M de $(\mathcal{E})$ tels que $MB^2 + MC^2 + 2MD^2 = 2$ et (Γ_4) est l'image de (Γ_3) par l'application g de $(\mathcal{E})$ dans $(\mathcal{E})$ qui à tout point M associe le point M' tel que :

$$\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\right) \wedge \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M'C} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}.$$

9- Détermine le nombre de matériaux de chaque type.

10- Justifie que :

a) Pour tout point M de $(\mathcal{E})$, on a : $\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\right) \wedge \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{CD}$

b) Pour tous points M et M' de $(\mathcal{E})$, on a : $g(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{CD}$

c) g admet un seul point invariant I.

11- Démontre que g est une homothétie dont tu préciseras les caractéristiques.

12-

a) Démontre que (Γ_4) est une sphère.

b) Justifie que l'aire totale des surfaces (Γ_3) et (Γ_4) vaux dix (10) fois celle de (Γ_3).

FIN

SUJET DU BAC 2019, SERIE C (D 462)

Durée : 04 heures

Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.

Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.

Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements

Contexte : Aménagement du centre de réception des invités à un mariage

A l'occasion du mariage de sa sœur, Sovi, élève en classe terminale, s'est rapproché de Bio, un membre du comité d'organisation de la réception des invités. Il traduit en langage codé les informations reçues de Bio comme suit : « le comité a prévu l'utilisation de n figures géométriques $(n \in \mathbb{N})$ pour l'embellissement du cadre physique ; le nombre de sièges pour les invités s'écrit $\overline{nnn}$ dans le système de numération de base 7 (sept) et $PGCD(n^3+5n^2+n+5;3)=3$ ». L'une de ces figures est un tétraèdre régulier $ABCD$ de l'espace orienté ε et une deuxième figure est l'image de ce tétraèdre par une transformation de ε.

Sovi veut déterminer le nombre de sièges, évaluer l'aire de l'un des solides à matérialiser et construire quelques-unes des figures géométriques considérées.

Tâche : Tu es invité(e) à apporter des réponses adéquates aux préoccupations de Sovi en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1

1)

a) Justifie que les entiers (n^2+1) et 3 sont premiers entre eux. Tu pourras utiliser la congruence de n modulo 3.

b) Justifie que

$$PGCD(n^3+5n^2+n+5;3) = PGCD(n+5;3).$$

c) Détermine l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles :

$$PGCD(n^3+5n^2+n+5;3)=3.$$

2)

a) Justifie que le comité d'organisation a prévu 4 figures géométriques.

b) Ecris dans le système décimal le nombre de sièges réservés aux invités.

Problème 2

Le tétraèdre $ABCD$ a pour aire, en unités d'aires, $\left|\int_0^{\frac{\pi}{3}} 64 sin^3 x cos2x dx\right|$.

La transformation dont il s'agit est $h_2 o h_1$ où h_1 est l'homothétie de centre A et de rapport 3 et h_2 l'homothétie de centre C et de rapport (-2). L'objet matérialisant l'image par cette transformation du solide sera recouvert de papier peint synthétique.

3) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'application $h_2 o h_1$.

4)

a) Justifie qu'on a, pour tout nombre x :

$$sin^3 x cos2x = -2cos^4 x sinx + \\ +3cos^2 x sinx - sinx.$$

b) Calcule l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} sin^3 x cos2x dx$

c) Calcule l'aire de la surface de l'image par $h_2 o h_1$ du tétraèdre $ABCD$.

Problème 3

Le plan P étant muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, une autre figure est une portion de la courbe représentative (Γ_1) de la fonction f de $[1;+\infty[$ vers $[0;+\infty[$ définie par : $f(x)=\sqrt{x^2-x}+\ln x$.

La quatrième figure géométrique est une portion de l'ensemble (Γ_2) des points N du plan tels que OMN est un triangle rectangle en O et isocèle, M est un point de (Γ_1) et l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right)$ de sens direct.

5)

a) Etudie la dérivabilité de f à droite en 1.

b) Achève l'étude des variations de f.

c) Justifie que f est une bijection

6)

a) Calcule $\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x^2 - x} - x\right)$

b) Etudie les branches infinies de (Γ_1).

7)

a) Justifie que pour tout x élément de $]1;+\infty[$ l'équation $f'(x) = 1$ est équivalente à l'équation $\sqrt{x^2 - x} = \frac{2x^2-x}{2(x-1)}$.

b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2 - x} = \frac{2x^2-x}{2(x-1)}$.

c) Déduis-en que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]1;+\infty[$ une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$.

8)

a) Etudie la position relative de (Γ_1) et de la droite Δ d'équation $y = x$.

b) Trace la courbe (Γ_1).

9)

a) Justifie que (Γ_2) est l'image de (Γ_1) par une rotation r que tu préciseras.

b) Justifie que (Γ_2) est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) telles que $\sqrt{y^2 - y} + \ln y + x = 0$.

c) Démontre que (Γ_2) est l'image de la courbe de la bijection réciproque f^{-1} de f par une symétrie orthogonale dont tu préciseras l'axe.

d) Construis (Γ_2).

FIN

SERIE D

SUJET DU BAC 2017, SERIE D (B 962)

Durée : 4 heures

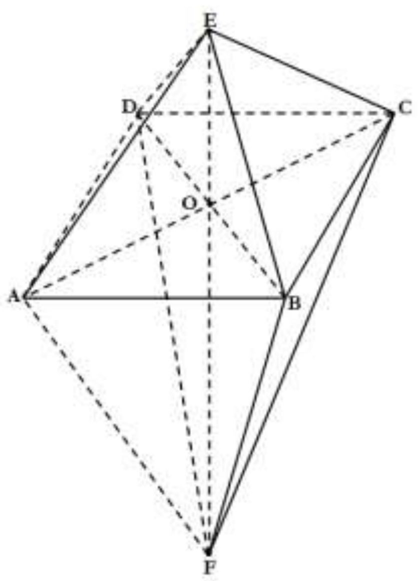
Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.

Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.

Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Contexte : Un système d'éclairage peu ordinaire.

Tafè est un sculpteur passionné des mathématiques. Il a conçut pour éclairer son salon, lampadaire représenté par le solide (S) suivant :



Le solide (S) est tel que :

- Le quadrilatère $ABCD$ est un carré de centre O.
- La droite (EF) est perpendiculaire au plan (ABC) en O.
- $OA = OB = OE = 1$ et $OF = 2OE$, l'unité de longueur étant 2 dm.
- La face FBC a été décorée avec des configurations planes.
- Deux ampoules ont été placées en des endroits qui sont assimilés aux points H et K projetés orthogonaux de A respectivement sur le plan (FBC) et sur la droite (ED).

Vidaho, fils de Tafè, a été toujours émerveillé par le lampadaire. A présent qu'il est en classe de terminale scientifique, il veut utiliser ses connaissances pour étudier certaines informations reçues de son père et qui ont servi à sa conception.

Afin de connaître certaines caractéristiques du lampadaire, Vidaho a supposé que l'espace est muni du repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE})$.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des réponses aux préoccupations de Vidaho en résolvant les trois problèmes ci-après.

Problème 1

1- Détermine dans le repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE})$ les coordonnées des points C, D et F.

2-

a) Démontre que le plan (FBC) a pour équation cartésienne $2x - 2y + z + 2 = 0$.

b) Détermine une représentation paramétrique de la droite passant par A et perpendiculaire au plan (FBC).

c) Détermine les coordonnées du point H.

3-

a) Détermine une équation cartésienne du plan (P) passant par A et perpendiculaire à la droite (DE).

b) Détermine les coordonnées du point K.

c) Calcule la distance KH.

4- Calcule le volume du solide (S).

Problème 2

La configuration représentée dans le plan (FBC) a été obtenue à partir de la courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé, de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x-\ln x} + \frac{x}{\ln x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

5- On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x - \ln x$.

a) Etudie le sens de variation de g.

b) Déduis-en que pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$, $g(x) \geq 1$.

6- Soit D_f l'ensemble de définition de f.

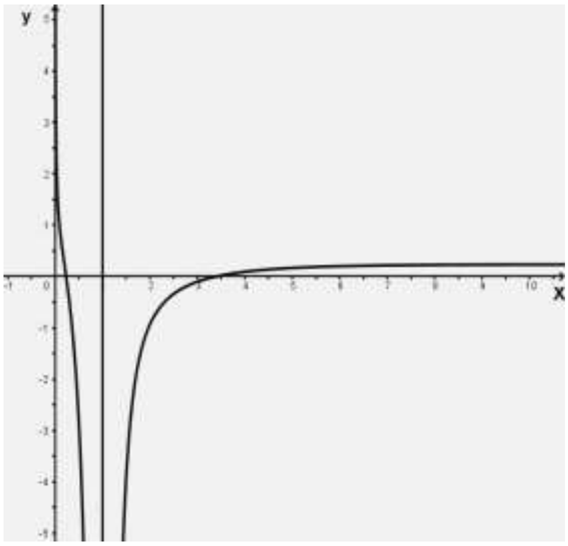
a) En utilisant la question 5-b), démontre que $D_f = [0\,;1[\cup]1;+\infty[$.

b) Justifie que f est continue sur chacun des intervalles $[0\,;1[$ et $]1;+\infty[$.

c) Etudie la dérivabilité de f à droite en 0 et donne une interprétation géométrique du résultat.

d) Détermine les limites de f aux bornes de D_f.

7- Sur le dessin ci-après, on a représenté la courbe (Γ) de la fonction dérivée f' de f, et son asymptote d'équation $x = 1$.



A partir de la courbe (Γ) :

a) Justifie que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans $]0;1[\cup]1;+\infty[$ deux solutions α et β avec $\alpha < \beta$.

b) Détermine le signe de $f'(x)$ pour tout x élément de $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

8- Détermine le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

9- Etudie les branches infinies de la courbe (C_f) puis trace (C_f).

Tu prendras $\alpha = 0{,}25$ et $\beta = 3{,}4$.

Problème 3

L'installation électrique à l'intérieur du lampadaire est configurée pour qu'au déclenchement de l'interrupteur pour l'allumer, les deux ampoules A_1 et A_2 qui s'y trouvent puissent être allumées ou éteintes, et cela indépendamment l'une de l'autre. Après de nombreuses observations, Vidaho a pu établir que la probabilité pour que l'ampoule A_1 s'allume est 0,8 alors que la probabilité pour que A_2 s'allume est 0,6.

10- Détermine la probabilité pour qu'à un déclenchement donné de l'interrupteur pour allumer le lampadaire :

a) une et une seule des deux ampoules soit allumée ;
b) les deux ampoules soient simultanément allumées.

11- Pendant le réveillon de la Saint-Sylvestre, l'interrupteur a été déclenché n fois pour allumer le lampadaire, n étant un entier naturel supérieur à 1.

a) Détermine la probabilité P_n pour qu'à chaque fois les deux ampoules soient allumées.
b) Détermine le plus petit entier naturel n tel que $P_n < 0{,}01$.

FIN

BAC 2018, SERIE D (E 062)

Durée : 4 heures

Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.

Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.

Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Contexte : Contribution de la jeunesse à La réalisation d'un projet communautaire.

En vue de réaliser un parc d'attraction, le conseil communal de Dodji a initié un concours circonscrit aux élèves des collèges de la commune et visant à recueillir leurs projets d'architecture du parc. Dossou, un élève en classe terminale D, décide d'y participer. Il imagine un parc circulaire, traversé par une grande voie rectiligne, deux lampadaires géantes, plusieurs voies secondaires ainsi qu'une rubrique « embellissement » où il suggérerait de planter une fleur dont il a lu l'extraordinaire qualité d'expansion dans une revue spécialisée.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, le pourtour (C) du domaine circulaire, la voie rectiligne et les deux lampadaires sont définis de la façon suivante :

Etant donné un nombre complexe z d'écriture complexe $z = x + iy$, avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, différent de $-2-3i$, et en notant $f(z)$ le nombre complexe $\frac{z-4-3i}{z+2+3i}$,

- (C) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre imaginaire,
- (Δ) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel,
- Les deux lampadaires sont représentées par les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B tels que $z_A = f(-2-i)$ et $f(z_A) = i$.

Dossou veut formaliser son projet et y mettre un dessin de tout ce qu'il y a conçu ainsi que les résultats de l'étude sur l'évolution de la fleur à planter.

Tâche : Tu es invité(e) à répondre aux préoccupations de Dossou en résolvant les trois problèmes ci-après.

Problème 1

1- Détermine z_A et z_B

2- Détermine la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$en fonction de x et de y.

3-

a) Démontre que (C) est une partie d'un cercle dont tu préciseras le centre et le rayon.

b) Détermine (Δ).

c) Construis $(\Delta), (C)$ et les points A et B sur une même figure.

Problème 2

L'une des voies secondaires a l'allure de la courbe (Γ), représentative dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)\ln(x^2+2x+1), \text{si } x \neq -1 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

Les fleurs seront initialement plantées sur le domaine délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

4- Justifie que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$

5-

a) Justifie que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Etudie la dérivabilité de f en -1 et donne une interprétation géométrique du résultat.

6-

a) Calcule $f'(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}-\{-1\}$.

b) Etudie le signe de $f'(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}-\{-1\}$.

c) Dresse le tableau des variations de f.

7-

a) Etudie les branches infinies de la courbe (Γ).

b) Trace (Γ).

8-

a) Justifie que la fonction F définie sur $[-1;0]$ par $F(t)=\int_t^0 f(x)dx$ est continue sur $[-1;0]$.

b) Justifie que pour tout $t \in]-1;0]$,

$$F(t)=-(t+1)^2\ln(1+\mathrm{t})+\frac{1}{2}t(2+t).$$

c) Calcule $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} F(t)$ et justifie que cette limite est égale à $F(-1)$.

a) Calcule l'aire du domaine initial sur lequel les fleurs seront plantées.

Problème 3

Selon les informations lues par Dossou, la surface occupée par la fleur évolue en fonction du temps. En désignant par u_n la surface occupée par la fleur après n années, $n \geq 1$, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$est telle que $u_{n+1}=\frac{nu_n+4}{n+1}$.

On suppose que $u_1=\frac{1}{2}$(unités d'aire).

9- Calcule u_2 et u_3.

10- On pose pour tout entier naturel n supérieur ou égal à $1, v_n = nu_n$.

a) Démontre que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont tu préciseras la raison et le premier terme.

b) Déduis-en v_n puis u_n en fonction de n.

c) Démontre que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée.

11- Démontre que l'aire du domaine occupé par la fleur au cours de son expansion a une limite que tu préciseras.

FIN

BAC 2019, SERIE D (D 672)

<u>Durée</u> : 4 heures

Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.

Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.

Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

<u>Contexte</u> : Une démarche originale vers l'extension d'un maquis-bar.

Pour le compte du maquis-bar de M. Sokéo, une enquête a été menée pendant dix mois au sujet du nombre X de clients par mois et la recette mensuelle Y en million de francs CFA. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-après.

x_i	1000	1500	2500	5000	4000	4500	2000	1500	3000	3500
y_i	2	3,5	5,5	11	8,5	10	4,5	3	6,5	8

Têtê, fils de Sokéo, s'intéresse à la série statistique double (X, Y), X correspondant aux valeurs x_i et Y aux valeurs y_i ainsi définies. Par ailleurs, Têtê offre ses services à son père pour quelques constructions mathématiques en vue de la décoration d'un autre maquis-bar en projet.

<u>Tâche</u> : Tu es invité(e) à apporter des réponses adéquates aux préoccupations de Têtê en résolvant les trois problèmes suivants :

<u>Problème 1</u>

1)

a) Représente le nuage de points de la série double de caractère (X, Y). (Tu prendras 1 cm pour 1000 clients sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 million de FCFA sur l'axe des ordonnées).

b) Ecris une équation cartésienne de la droite de régression de Y en X.

2)

a) Calcule le coefficient de corrélation linéaire.

b) Interprète ce coefficient.

<u>Problème 2</u>

Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'équation suivante d'inconnue z :

$$(E) : z^2 - \left(1 + \sqrt{3} + 2i\right)z + \sqrt{3} - 1 + i\left(1 + \sqrt{3}\right) = 0$$

dont les solutions u et v sont les affixes respectives des points A et B tels que : $\mathcal{R}\mathrm{e}(u) > \mathcal{R}\mathrm{e}(v)$.

On désigne par r la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en B. Une première décoration proposée par Têtê est composée du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC et de son image (Γ') par r.

3)

a- Calcule $\left(1 - \sqrt{3}\right)^2$.

b- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

c- Détermine une écriture complexe de la rotation r.

4)

a- Justifie que le point C a pour affixe $w = \frac{2(1-i)}{1-i\sqrt{3}}$

b- Ecris w sous forme exponentielle.

c- Précise la nature du triangle ABC.

d- Construis l'image (Γ') du cercle (Γ) par la rotation r.

<u>Problème</u> 3

Une autre décoration proposée par Têtê est le domaine plan (Δ) délimité par les courbes représentatives et (Γ_f) et (Γ_g) de deux fonctions f et g et l'axe des abscisses.

La fonction g est définies par :

$$g(x) = 1 - x - \frac{x}{e^x}.$$

5)
   a) A l'aide d'une intégration par parties, justifie que $\int_0^x (1+t)e^t dt = xe^x$.
   b) Démontre que pour tout nombre réel x, $f(x) = x + 1 + xe^x$

6)
   a) Justifie que la dérivée f' de la fonction f admet un minimum que tu préciseras.
   b) Déduis-en le signe $f'(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

7)
   a) Achève l'étude des variations de f.

8) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$.

9)
   a) Etudie les branches infinies de (Γ_f)
   b) Trace la courbe (Γ_f).

10)
   a) Justifie que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(-x)$.
   b) Déduis-en que (Γ_g) est l'image de (Γ_f) par une transformation que tu caractériseras.
   c) Construis (Γ_g) sur la même figure que (Γ_f).

11)
   a) Justifie que $\int_0^{-\alpha} g(x)dx = \int_\alpha^0 f(x)dx$
   b) Calcule $\int_\alpha^0 f(x)dx$
   c) Démontre que l'aire en unités d'aire du domaine (Δ) est $S = \left(\alpha^2 + \frac{2}{\alpha} + 2\right)$.

FIN.